Ch. 6

Subject Summary Day ______ Date ______

* Laplace transform:

*يُعتبر (S) ← cons.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

* جدول (1) *

$f(t)$	$F(s)$	$(s > 0)$
c	$\frac{c}{s}$	
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	
t^n, $n =$ integer	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	

* $\mathcal{L}$ is leanear

$\mathcal{L}\{a f(t) + b\, g(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$

Subject ________ Day ________ Date ________

* Theorem:

$$\mathcal{L}\{e^{at}.f(t)\} = F(s-a)$$

* بنشيل ال (e) و بنحل (كل) الاقتران حسب جدول (1) .
* ال exponential بيعمل (shift) بمقدار (a) .

* The inverse Laplace transform: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$
* برضو لازم أعتمد ع الجدول (1) .

* $(\mathcal{L}^{-1})$ is linear

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s)+b\,G(t)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F_s\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G_s\}$$
$$= af(t) + bg(t)$$

* $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{at}f(t)$
* لازم كل (s) في ال(كل) تكون متشابهات، إذا ما كانو ممكن أطرح وأجمع أو أكمل مربع وهكذا ...
* برضو بعتمد ع جدول (1) .

* unit step functions:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le c \\ 1, & t \ge c \end{cases}$$ شرط

* إذا عوضنا مكان (t) عدد أكبر من (c) ∴ = 1
* إذا عوضنا (t) أصغر من (c) ∴ = 0

مهم $\boxed{u_0(t) = 1}$

Subject .... Day .... Date ....

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \frac{e^{-cs}}{s}$$

بعوض بدل (t) بـ (t+c)

$$* \; \mathcal{L}\{u_c(t) \cdot f(t-c)\} = e^{-cs} \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-cs} \cdot F(s)$$

* رمز بنفتش جدول (1)

$$f(t-c+c) = f(t)$$

* Identities:

$\sin(\pi + t) = -\sin t$	$\sin(\frac{\pi}{2} + t) = \cos t$
$\sin(\pi - t) = \sin t$	$\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$
$\cos(\pi + t) = -\cos t$	$\cos(\frac{\pi}{2} + t) = -\sin t$
$\cos(\pi - t) = -\cos t$	$\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$

* كيف أتعامل معها ؟!

(1) π ← بضل الناتج نفس الدالة المثلثية.

[1] $\frac{\pi}{2}$ ← بعكس الدالة المثلثية في الناتج

[2] الإشارة ← بتطلع على الناتج في أي ربع موجود وبحط إشارته.

[2] الإشارة ← بتطلع على السؤال في أي ربع موجود وبحط إشارته مع الناتج

* هاي ال (identities) ممكن أحتاجها بالحل إذا صار عندي مثلاً $\sin(t+\pi)$ بعد ما ~~أجمع~~ أحط مكان كل (t) ← (t+c).

Subject ______ Day ______ Date ______

$$* \text{ let } f(t) = \begin{cases} f_{(1)}(t) & 0 \le t < C_1 \\ f_2(t) & C_1 \le t < C_2 \\ f_3(t) & C_2 \le t < C_3 \end{cases}$$

*إذا أجا أكثر من اقترانات متشعبات بكتبهم بهاد الشكل:

$$f(t) = f_1(t)\left[U_0(t) - U_{c1}(t)\right] + f_2(t)\left[U_{c1}(t) - U_{c2}(t)\right] +$$

$$f_3(t)\left[U_{c2}(t)\right]$$

* بعد ما أطلع شكل $f(t)$ بحطه (لك)
وبحله حسب القواعد اللي قبل.

التذكير

$$\boxed{U_0(t) = 1}$$

$$* \; \mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs} F(s)\} = U_c(t) \cdot f(t-c)$$

← بعد ما أطلع $f(t)$ بحط مكان كل $(t) \Leftarrow (t-c)$

Remark : Partial fraction

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \boxed{1 - e^{-t}}$$

* نحفظه أحسن
لأنه بتكرر كثير
(اختصر وقت)

Subject ______ Day ______ Date ______

* $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$

* $\mathcal{L}\{y'(t)\} = s\,Y(s) - y(0)$

* $\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0)$

* كيف نلاقي حل O.D.E ؟!

1. بناخذ ($\mathcal{L}$) للطرفين.
2. بنعوض مكان كل طرف.
3. بنجعل $Y(s)$ موضوع قانون (بناخذ عامل مشترك وبننقل الأطراف).
4. بناخذ ($\mathcal{L}^{-1}$) ولإيجاد $y(t)$ ،

* Dirak Delta functions : $\delta(t-a)$

→ 1. $\delta(t-a) = \begin{cases} \infty, & t = a \\ 0, & t \neq a \end{cases}$

→ 2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) \cdot dt = 1$

→ * يمكن أن يبدأ التكامل من رقم غير ($-\infty$) ولكن يجب أن تكون (a) ضمن الفترة.

Subject ________ Day ________ Date ________

* Theorem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) \cdot \underbrace{g(t)}_{\text{continous}} \cdot dt = g(a)$$

لازم نفرق
بين التكامل
و[illegible]

* Theorem:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as} \qquad (a \geq 0)$$

$$\mathcal{L}\{\underbrace{g(t)}_{\text{continuous function}} \cdot \delta(t-a)\} = e^{-as} \cdot g(a)$$

* بنقدر نوجد حل ODE (non-homog.) بنفس الطريقة
الموجودة بـ ص 5.

* $\mathcal{L}\{t\, f(t)\} = -F'(s)$

* بنحسب (لما الاقتران) [illegible] بنشتق [illegible] بدرجة (t)
وبنضرب بسالب.

(a [illegible] (e^{-as}) [illegible])

Subject ______ Day ______ Date ______

$$* \ \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -t \cdot f(t)$$

* إذا أعطاني $(\tan^{-1} / \cot^{-1} / \ln)$ بيعلم بـ $F(s)$.
بعدها بشتق الطرفين وبحط $(\mathcal{L}^{-1})$ لإيجاد $f(t)$.

* إذا أعطاني اقتران عادي داخل $(\mathcal{L}^{-1})$ ~~[illegible]~~ بساوي $F(s)$
باقتران من عندي إذا اشتقيته بيعطيني السؤال المطلوب .
بعدها بشتق وبحط $(\mathcal{L}^{-1})$ لإيجاد $f(t)$.

$$* \ \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_{s}^{\infty} F(u)\, du$$

* بحسب $(\mathcal{L})$ لـ $f(t)$ بعدها بكامل الناتج، هون عطيناه بدلاله (u)
لأنه الـ (s) هي أحد حدود التكامل .

$$\boxed{* \text{التذكير :} \quad \tan^{-1}\infty = \frac{\pi}{2}}$$

$$* \ \mathcal{L}\left\{\int_{0}^{t} f(u)\, du\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

* بحل $\mathcal{L}$ لما داخل التكامل وبقسم
الناتج على (s) .

$$* \ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_{0}^{t} f(u)\, du$$

* هاي الطريقة بتربط بدل
partial fraction

* بحل $\mathcal{L}^{-1}$ $F(s)$ بعدها بكاملها (بعد تشيلها من القسمة على s)