Ch. 5

Subject: Summary   Day ______   Date ______

** power series method :

taylor series $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2 ---$

** بتكون (analytic) إذا كانت السيريز exist في كل x في الفترة المفتوحة

* مثل : 1 polynomial

2 e^x , $\sin x$, $\cos x$

3 Rational function, except : (أصفار المقام)

** ordinary points : $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$ --- (*)

↳ if $\frac{B(x)}{A(x)}$, $\frac{C(x)}{A(x)}$ is analytic (لازم الاثنين يكونوا)

** إذا ما كانت وحدة فيهم على الأقل analytic بصير اسمها → (singular point).

** إذا كانت (x_0) عبارة عن ordinary p. للمعادلة (*) ف DE. إلها حلين * (2 nontrivial linearly inde. power seires solution)

$y = \sum_{n=0} a_n (x-x_0)^n$

$y' = \sum_{n=1} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ → دايمًا بنبدأ السيريز بالرقم اللي ما بخليها تصفر.

$y'' = \sum_{n=2} (n-1) n a_n (x-x_0)^{n-2}$

Subject ________ Day ________ Date ________

✯ Identity principle:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \Rightarrow \boxed{a_n = b_n}$$

✯ In particular $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow \boxed{a_n = 0}$

✯ How to find power series solution at $x = x_0$

1. نتأكد إذا x_0 ordinary
2. نكتب الشكل العام للحل ⇐ $y=\sum a_n(x-x_0)^n$ ، ثم نشتقها لـ y'/y''
3. نعوضهم في المعادلة الأصلية $(A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=0)$ وندخل المعاملات للسيريز [مباشرة أو نضيف ونطرح]
4. نوحد القوى داخل السيريز [ما نقدر نضيف أو نطرح لكل n موجودة في السيريز]
5. نوحد بداية السيريز [بنعوض حدود السيريز لحد ما نوصل لأعلى رقم بلشت منه]
6. بناخذ عامل مشترك وبنجمع كلشي بسيريز وحدة.
7. نستخدم Idintity principle ونطلع بعض الحدود.
8. وبناخذ الجزء اللي فيه a_n وبنكتب Recurrence Relation

[بنحاول تكون أعلى (n) موضوع القانون، مثلاً $a_{(n+2)} = \frac{a_n}{(n+2)}$]

بنعوض الحدود وبنلاحظ أنه رح يتكرر معنا a_1/a_0.

بنعوض في الشكل العام أول ٣ حدود وبنكتب معادلة الحلول الناتجة معي

9. باخذ (a_0) عامل مشترك و (a_1) عامل مشترك
10. $c_2/c_1 = a_1/a_0$

باقي الحدود الناتجة بعتبرها y_1 / y_2 .

Subject ______ Day ______ Date ______

** Regular singular points :

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0 \quad \text{---} (*)$$

*إذا كانت $(x = x_0) \Leftarrow$ singular point $(A(x) = 0)$ ، بعتبرها regular singular point ، إذا كانت :

① $\lim_{x\to x_0} \frac{B(x)}{A(x)}(x-x_0) = P_0 < \infty$

② $\lim_{x\to x_0} \frac{C(x)}{A(x)}(x-x_0)^2 = q_0 < \infty$

إذا كانو الصارثين (exact) بعتبرها reg. sing. point

* إذا كانت (reg. sing. p) بقدر أطلع indicial equation

$$\boxed{r(r-1) + P_0 r + q_0 = 0}$$

له ال Roots للمعادلة هي قيم (r) .

** Frobenius Theorem :

* إذا كانت $x_0 \Leftarrow$ (reg. sing. p) للمعادلة (*) ، يكون لها على الأقل حل واحد من الشكل :

$$y = \sum_{n=0} a_n (x-x_0)^{(n+r)}$$

$$y' = \sum_{n=0} (n+r) a_n (x-x_0)^{(n+r-1)}$$

$$y'' = \sum_{n=0} (n+r-1)(n+r) a_n (x-x_0)^{(n+r-2)}$$

* بنحدد قيمة r من (indicial equation) *

Subject ______ Day ______ Date ______

** How to find power series solution :

[1] بنختبر إذا كانت (x_0) (reg, sing, point)

[2] بنكتب الحل العام لـ (y) ومشتقاتها y', y'' وبنعوضها في $(*)$

* بنكمل نفس خطوات لحد ما نوصل الـ [recurrence realation]

فنكتب الصورة العامة اله، بعدها بنعوض قيم (r) الي طلعناها من initial equ. :

+ بنعوض قيمة r_1 ونطلع y_1
+ = = r_2 ونطلع y_2

هاد الحكي إذا كان الفرق بين r_1, r_2 لا يساوي عدد صحيح

$r_1 > r_2$, $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$

** إذا كانت $(r_1 > r_2)$ و $(r_1 - r_2 \in \mathbb{Z})$ يعني الفرق بينهم عبارة عن عدد صحيح ، وقتها ؛

$$y_1(x) = \sum_{n=0} a_n x^{n+r_1}$$

$$y_2(x) = C\, y_1(x) \ln(x) + \sum_{n=0} a_n x^{n+r_2}$$

فإذا كانت $\boxed{C=0}$ وقتها

برجع اله عامل وتقل السيريز

** إذا كانت $(r_1 = r_2 = r)$:

$$y_1 = \sum_{n=0} a_n x^{n+r}$$

$$y_2 = y_1 \ln(x) + \sum_{n=0} a_n x^{n+r}$$