Ch. 3

Subject Summary Day ______ Date ______

$$y'' + P(x)\,y' + q(x)\,y = f(x)$$

* If $f_x = 0 \Rightarrow$ Homogeneous.

* Dependent / Independent solutions :

[1] $y_1 = c\,y_2 \Rightarrow \dfrac{y_1}{y_2} = \underbrace{c}_{\text{constant}} \Rightarrow$ Dependent + linearly

[2] Wronskian :

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

→ If $W[y_1, y_2] \neq 0 \Rightarrow$ Independent.

→ If $W[y_1, y_2] = 0 \Rightarrow$ Dependent.

* Abel's theorem :

$$W[y_1, y_2] = c\,e^{-\int P(x)\,dx}$$

Subject ____________ Day . ____________ Date ____________

* 2^{nd} ODE $\Rightarrow$ $y'' = f(x, y, y')$

General solution of equ (*) $\underbrace{y = C_1 y_1 + C_2 y_2}$

y_1, y_2 independent-linearly sol.

* How to solve:

$\boxed{III}$ Non-linear 2^{nd} order (special cases)

$\hookrightarrow$ y-missed $\Rightarrow$ $y'' = f(x, y')$

$\boxed{1}$ let $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$

2 variables

then $\dfrac{du}{dx} = y'' \Rightarrow u' = f(x, u)$

$\boxed{2}$ تتحول المسألة إلى 1^{st} ODE (separable) غالبًا

$\boxed{3}$ بنحل u عن طريقها وبنكاملها لنحصل على y (general sol.)

$\hookrightarrow$ x-missed $\Rightarrow$ $y'' = f(y, y')$

$\boxed{1}$ let $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$

then $\dfrac{du}{dx} = y'' = \dfrac{du}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$ → u

Subject ______ Day ______ Date ______

$\frac{du}{dy}, u = f(y, u) \rightarrow$ 2 variables

$\boxed{2}$ تحول إلى 1^{st} ODE

$\boxed{3}$ بنخلي u ع طرف وبعدها نفصل ع y

$\boxed{2}$ Given y_1 find y_2 :

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2} \cdot dx$$

* بحل y'' لحالها قبل الحل *

$\boxed{3}$ Homog. linear 2^{nd} ODE with constant coefficient :

$$\{ ay'' + by' + cy = 0 \}$$

let $y = e^{\lambda x} \Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda x} \Rightarrow y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$$\therefore \quad e^{\lambda x} \underbrace{(a\lambda^2 + b\lambda + c)}_{\text{characteristic equ.}} = 0$$

↳ characteristic equ.

* معادلة تربيعية بنحلها تحليل أو قانون عام

$$\left\{ \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$ القانون العام

Subject ______ Day ______ Date ______

$\boxed{\text{Case 1}}$ Two distinct real roots $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$
$(b^2-4ac) > 0$

$y_1 = e^{\lambda_1 x}$ $\quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$

general solution $\Rightarrow y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

$\boxed{\text{Case 2}}$ Repeated roots $(b^2-4ac = 0)$
$(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda)$

$y_1 = e^{\lambda x}$

$y_2 = xe^{\lambda x}$

general solution $\Rightarrow y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda x}$

$\boxed{\text{Case 3}}$ Complex roots $(b^2-4ac < 0)$

* $\sqrt{-1} = i$ complex number $\boxed{\alpha \pm \beta i}$

$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ — — —

$y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$

general solution $\Rightarrow y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

Subject ______ Day ______ Date ______

* To write the 2^{nd} ODE with constant coef. :

→ for λ_1 and λ_2, we write char. equ:

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=0$$

$$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+(\lambda_1\lambda_2)y=0$$

$\boxed{4}$ Cauchy Euler equ.

$$ax^2y''+bxy'+cy=0 \qquad x>0$$

let $y=x^r$

$$x^2\underbrace{(ar^2+(b-a)r+c)}_{\text{chara. equ.}}=0$$

case 1 Real and distinct roots $(r_1 \neq r_2)$

$$y_1=x^{r_1} \qquad y_2=x^{r_2}$$

General solution $y=C_1x^{r_1}+C_2x^{r_2}$

Subject ______ Day ______ Date ______

$\boxed{\text{Case 2}}$ Repeated roots $(r_1 = r_2 = r)$

$y_1 = x^r \qquad y_2 = x^r \ln|x|$

general solution $y = C_1 x^r + C_2 x^r \ln x$

$\boxed{\text{case 3}}$ Complex roots $(r = \alpha \pm i\beta)$

$y_1 = x^\alpha \cos(\beta \ln x) \qquad y_2 = x^\alpha \sin(\beta \ln x)$

General solution $y = C_1 x^\alpha \cos(\beta \ln x) + C_2 x^\alpha \sin(\beta \ln x)$

To write the 2nd ODE with cauchy-Euler :

$(r - r_1)(r - r_2) = 0$

$\underbrace{1}_{(a)} r^2 - \underbrace{(r_1 + r_2)}_{(b-a)} r + \underbrace{r_1 r_2}_{(c)} = 0$

Subject ______ Day ______ Date ______

⁂ Non-homo. 2^{nd} ODE

$$a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = f(x)$$

general sol. $\Rightarrow$ $y(x) = y_{(h)}(x) + y_{(P)}(x)$ ← ح (Y)

[1] undetermined cofficients :

* يجب انه تكون f(x) :

الصيغ العامة : [1] polynomyal $(Ax+B)$, (Ax^2+Bx+C)

[2] exponential (Ae^{ax})

[2] $\sin(bx)$, $\cos(bx)$

The solving :

[1] $(y_h(x))$: by solving $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$

(2^{nd} order homo. linear. with coef. حل طريقة)

[2] (y_p / Y) :

[1] نكتب جزء f(x) بالصورة العامة حسب الاقترانات

[2] ننقارنها بالحل العام لل (y_h) إذا في حدود متشابهة بنضرب الحد في (Y_p) بـ (X)، (إذا ما في تشابه بنكمل حل)

[3] نشتق الصورة العامة مرتين (Y', Y'') ونعوضهم بالاقتران الأصلي ونساويهم بـ f(x)

[4] بطريقة التوازن بنوجد قيم الثوابت ونعوضهم

[5] بكتب الـ (g.s) ⇐ $[\,y_{(x)} = y_h + y_p\,]$

Subject ______ Day ______ Date ______

[2] Variation of parameters :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

لا يمكن أن يكون معاملات متغير ← لها   *عادي شرط على g(x)

The Solving :

[1] $y_{(h)}$: by solving $y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$
(Cauchy-Euler equ. أو معادلة)

[2] $y_{(p)} / Y$:

* على القانون :

$$Y = -y_1 \int \frac{y_2}{W} \cdot g + y_2 \int \frac{y_1}{W} g$$

* نجد y_1 / y_2 من حل $\boxed{y_{(h)}}$
* W (رونسكي) $\quad W[y_1, y_2] = y_1 y_2' - y_2 y_1'$
* يجب أن نشترط على معامل (y'') يجب أن يكون (1)
(إذا ما كان 1 نقسم معاملته على (g))

general solution ⇒ $y = y_{(h)} + Y$